

Scientific reports

Réflexions divergentes autour de la sphère de photons d'un trou noir

Albert Sneppen

Depuis n'importe quel endroit situé à l'extérieur de l'horizon des événements d'un trou noir, il existe un nombre infini de trajectoires pour la lumière vers un observateur. Chacune de ces trajectoires diffère par le nombre d'orbites parcourues par le photon autour du trou noir et par la proximité de la dernière orbite de l'horizon. À l'aide d'une solution numérique simple et d'une solution analytique perturbée de l'équation géodésique nulle du trou noir de Schwarzschild, nous réaffirmerons comment chaque orbite supplémentaire se rapproche d'un facteur $e^{2\pi}$ du bord optique du trou noir. Par conséquent, la surface du trou noir et toute lumière de fond seront reflétées à l'infini dans des tranches exponentiellement plus fines autour de la dernière orbite du photon. En outre, le formalisme introduit prouve que les trajectoires entières de la lumière dans la limite du champ fort sont prescrites par une exponentielle divergente et une exponentielle convergente. Enfin, l'existence de la famille d'exponentielles est généralisée au plan équatorial du trou noir de Kerr et la dépendance des exponentielles au spin est dérivée. On prouve ainsi que la distance entre les images successives augmente et diminue pour les images respectivement rétrogrades et progrades. Dans la limite d'un trou noir de Kerr extrêmement rotatif, aucune divergence logarithmique n'existe pour les trajectoires progrades.

Les trous noirs sont des objets célèbres où les trajectoires spatiales de la lumière sont radicalement déformées par la courbure de l'espace-temps. Alors que la lumière elle-même ne peut pas s'échapper de la masse centrale au niveau de l'horizon des événements, à des distances plus grandes, la lumière peut tourner autour du trou noir. Dans le cas générique d'un trou noir non rotatif et électriquement neutre [c'est-à-dire un trou noir de Schwarzschild¹], l'horizon des événements est situé à la coordonnée radiale $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, tandis que les photons peuvent suivre des orbites circulaires instables à $\frac{3}{2}R_s$, ce qui correspond à ce qu'on appelle la sphère de photons ou l'orbite du dernier photon. Tout photon orbitant en deçà de cette distance plongera dans le trou noir, tandis que la lumière qui reste plus loin partira en spirale vers l'infini.

Toutefois, en fonction de la proximité de la dernière orbite du photon à l'horizon des événements, il peut effectuer plusieurs révolutions avant de tomber dedans ou de s'échapper vers l'infini^{2,3}. À mesure que l'on s'approche de la limite où les photons frôlent le rayon orbital critique exact, le photon effectuera un nombre infini d'orbites. Inversement, du point de vue d'un observateur à l'infini, cela implique que la lumière provenant de n'importe quel point (de l'horizon des événements à l'arrière-plan) peut orbiter autour du trou noir un nombre arbitraire de fois. Pour chacun de ces parcours, la lumière atteindra l'observateur un peu plus près du bord de l'horizon du trou noir⁴. Par conséquent, l'observateur verra toute la surface de l'horizon des événements et l'univers entier se répétant à l'infini près des bords du trou noir. Cette cartographie infinie a été largement étudiée, l'angle de déviation divergeant de façon logarithmique dans la limite du champ fort^{2,4-8}.

Cependant, nous présentons une méthodologie qui diffère des recherches précédentes en reformulant la trajectoire de la lumière sous forme d'une équation différentielle du second ordre et en quantifiant sa stabilité linéaire. Dans "Orbites simulées", nous étudions le comportement de petites déviations par rapport au bord optique d'un trou noir à l'aide d'un algorithme de traçage de rayons. Nous complétons avec une dérivation analytique dans "Stabilité linéaire". Dans le cas numérique et analytique, nous montrerons que les petites perturbations croissent de manière exponentielle. Inversement, chaque orbite supplémentaire sera mise en correspondance avec un anneau exponentiellement plus fin, l'image suivante étant plus fine d'un facteur $e^{2\pi}$. En fin de compte, cet article étudie

un problème bien connu à partir d'une nouvelle perspective analytique suggérant que non seulement l'angle de déviation, mais aussi l'ensemble des trajectoires de la lumière près de la sphère de photons sont prescrits par deux fonctions exponentielles duales.

De manière cruciale, cette approche est généralisable à tout trou noir à symétrie sphérique ou même au plan équatorial d'un trou noir en rotation. Dans "Généralisation de la métrique de Kerr", la dépendance des exponentielles par rapport au spin est dérivée et illustrée. Il est prouvé pour la première fois que la fréquence spatiale des images progrades et rétrogrades augmente et diminue respectivement par rapport au cas de Schwarzschild.

Configuration analytique

La métrique de Schwarzschild a la forme en unités avec la vitesse de la lumière, $c = 1$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (1)$$

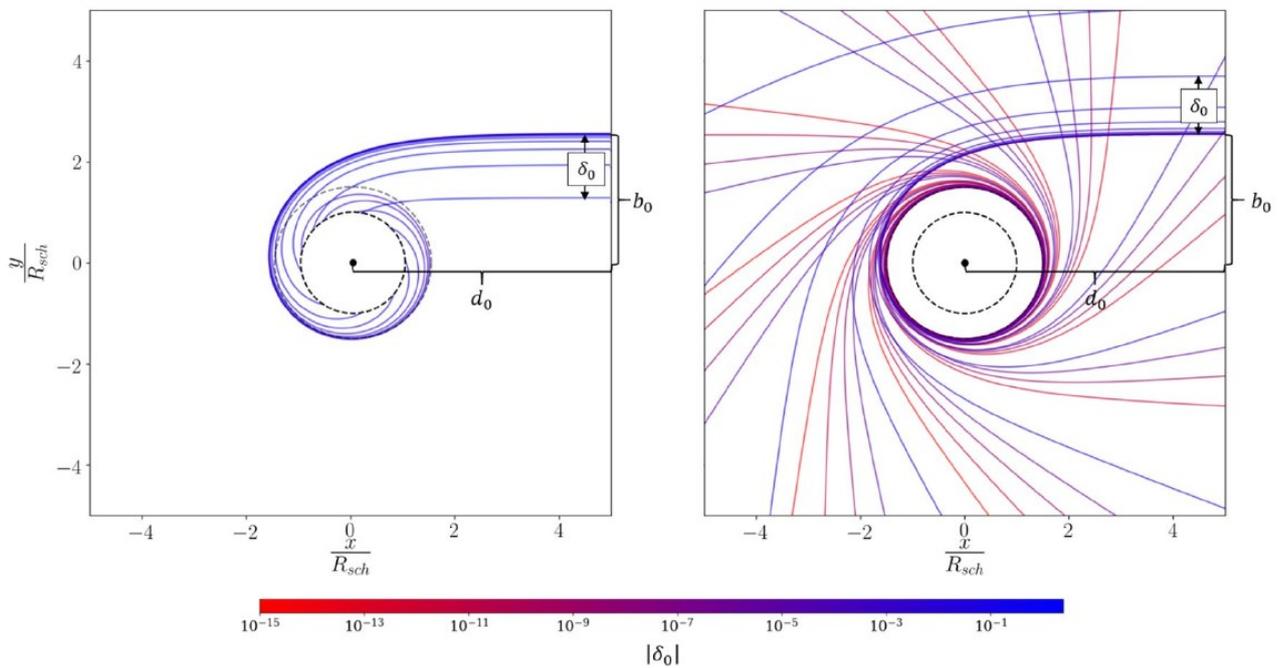


Figure 1: Rayons de lumière simulés satisfaisant l'équation (3) avec $\delta_0 < 0$ (gauche) et $\delta_0 > 0$ (droite), la couleur indiquant la magnitude de δ . Le trou noir est ombragé en gris avec la dernière orbite de photons indiquée par une ligne grise pointillée. Chaque trajectoire lumineuse successive tracée se rapproche d'un facteur 2 du rayon de capture des photons, l'angle de déviation résultant augmentant juste en dessous de 40° . Ainsi, l'échelle logarithmique vers le rayon de capture des photons correspond à une évolution linéaire de φ .

Sans perte de généralité, nous pouvons fixer le plan orbital de la lumière $\theta = \pi/2$. En introduisant les deux quantités conservées, le moment angulaire et l'énergie, nous pouvons pour une particule sans masse réduire l'équation de la trajectoire de la lumière à^{3,9} :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)r^2 + \frac{r^4}{b^2} \quad (2)$$

où b est le rapport constant entre le moment angulaire et l'énergie d'un photon. La réécriture de la différentielle avec φ n'est applicable que s'il y a une évolution angulaire, donc l'équation (2) ne s'applique pas dans le cas limite et trivial de la lumière se déplaçant radialement vers ou à partir d'un trou noir. En utilisant la substitution $u = R_s/r$ et en différenciant les deux côtés avec $\frac{d}{d\varphi}$, on

obtient l'équation simple du second ordre :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{3}{2}u^2 - u \quad (3)$$

Nous pouvons immédiatement reproduire l'orbite stationnaire de la sphère des photons pour le trou noir de Schwarzschild en fixant $\frac{d^2 u_{eq}}{d\phi^2} = 0$: $r_{eq} = \frac{R_s}{u_{eq}} = \frac{3}{2}R_s$. Remarque, la solution d'équilibre triviale pour $u = 0$ (c'est-à-dire à des distances infinies du trou noir) ne sera pas discutée plus loin.

Orbites simulées

Étant donné l'équation différentielle (équation 3) reliant la distance à la déviation angulaire, nous pouvons intégrer numériquement l'équation (3) en utilisant la méthode quartique de Runge-Kutta (voir Fig. 1). Dans cette approche, nous propageons la lumière d'un observateur vers le trou noir ou l'univers de fond. On obtient ainsi le même chemin lumineux que dans la direction opposée, car les solutions de l'équation (2) sont indépendantes de la direction de la lumière. L'intégration de l'équation (3) nécessite deux conditions initiales : en coordonnées cartésiennes, nous centrons le trou noir à l'origine, nous fixons la direction initiale de la lumière à $\hat{v}_0 = (-1, 0)$ et la position initiale $\mathbf{r}_0 = (d_0, b_0 + \delta_0)$. Ici b_0 (le paramètre d'impact critique) est la distance à l'intérieur de laquelle les photons sont capturés et à l'extérieur de laquelle les photons sont déviés. Ici d_0 peut être arbitrairement grand étant donné b_0 à cette distance qui dans $\lim_{d_0 \rightarrow \infty} b_0 = \frac{\sqrt{27}}{2}R_s$ devient le rayon de capture des photons couramment trouvé dans la littérature¹⁰. δ_0 est notre perturbation initiale que nous utilisons pour éviter l'ambiguïté de la définition de la plus proche approche pour les rayons lumineux qui spiralent dans la sphère du photon. Il est important de noter que δ_0 peut être interprété comme la distance à laquelle l'observateur regarde à partir du bord du trou noir optique.

La trajectoire de la lumière avec un δ_0 variable est illustrée à la Fig. 1. Les perturbations positives et négatives vont respectivement s'étendre en spirale vers l'infini ou plonger dans l'horizon des événements, comme prévu. Plus δ_0 est petit, plus l'angle de déviation augmente. Notez que ϕ augmente linéairement en se rapprochant logarithmiquement du rayon de capture des photons.

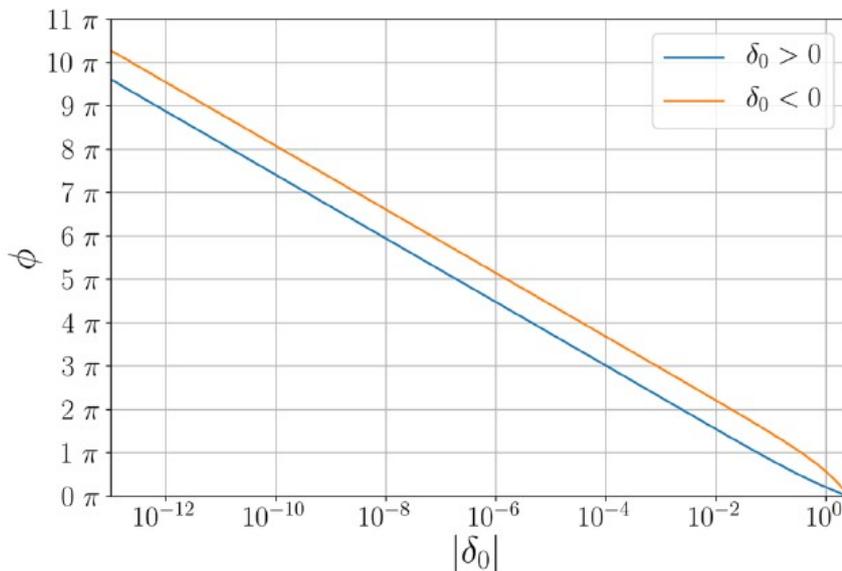


Figure 2 Angle de rotation pour les rayons lumineux simulés en fonction des déviations de l'équilibre (en unités sans dimension avec $\delta_0 = l/R_s$) avec $\phi = 0$ représentant les rayons lumineux non fléchis. Pour les petites perturbations positives et négatives, une relation exponentielle claire avec ϕ est visible.

La figure 2 montre les résultats pour des perturbations positives (où l'angle ϕ est l'angle de déviation non enveloppé) et négatives (l'angle ϕ étant défini comme l'angle d'orbite autour du trou

noir au moment où les photons traversent l'horizon des événements). Pour les grandes perturbations, la relation entre l'angle et la distance n'est pas simplement exponentielle. Cependant, dans le régime des petites perturbations ($|\delta_0| < 10^{-2}$), une relation exponentielle étroite est visible. Pour déterminer l'exposant dans le régime exponentiel, nous pouvons ajuster $\varphi = s \ln(\delta_0) + c$, et avec la pente : $s = -1,0000 \pm 0,0001$. L'inversion de cette expression pour δ_0 implique que pour atteindre une autre orbite, il faut être un facteur de $f = e^{-2\pi s} = 535,60 \pm 0,45$ plus proche du bord optique du trou noir.

Stabilité linéaire

Pour interpréter ces résultats numériques, nous allons utiliser l'analyse de stabilité linéaire en ajoutant de petites perturbations, $u \rightarrow u_{eq} + \delta$ à la solution d'équilibre de l'équation (3) :

$$\frac{d^2(u_{eq} + \delta)}{d\phi^2} = \frac{3}{2}(u_{eq} + \delta)^2 - (u_{eq} + \delta) \quad (4)$$

En linéarisant l'équation autour de $u_{eq} = \frac{2}{3}$ on obtient :

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2} = \delta + \frac{3}{2}\delta^2 \approx \delta \quad (5)$$

qui a la solution :

$$\delta = \delta_1 e^\phi + \delta_{-1} e^{-\phi} \quad (6)$$

Évidemment, le premier terme croît en magnitude tandis que le second décroît, avec les constantes δ_1 et δ_{-1} qui déterminent dans quel régime chaque terme domine. Les constantes sont fixées par les conditions initiales de la trajectoire, qui seront discutées plus en détail dans la section **"Stabilité linéaire"**. Notez que la forme exponentielle duale est à prévoir puisque la solution d'équilibre est un point nodal.

Intuition à travers les collecteurs.

Une autre perspective de ces solutions exponentielles se trouve dans l'espace des phases de l'équation (3). Ceci est illustré à la figure 3 où, pour chaque condition initiale $(u, \frac{du}{d\phi})$, un vecteur est tracé indiquant la variation angulaire dans les deux variables (c'est-à-dire $(\frac{du}{d\phi}, \frac{d^2u}{d\phi^2})$). Les trajectoires se terminant à $u = 1$ (c'est-à-dire $r = R_s$) sont les rayons lumineux atteignant l'horizon des événements, tandis que l'infini est à $u = 0$. La plupart des trajectoires traverseront la sphère du photon avec des vitesses radiales, mais si $\frac{du}{d\phi} = 0$ sur la sphère du photon, alors le photon restera indéfiniment dans son orbite circulaire. Ainsi, les orbites sur la sphère du photon représentent un point fixe dans l'espace des phases.

L'ensemble des conditions initiales qui convergent vers la sphère des photons (que l'on appelle le collecteur stable) est indiqué par une ligne bleue. Les photons sur cette trajectoire s'approcheront asymptotiquement de la sphère des photons. À l'inverse, le manifold instable (c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales qui atteignent le point fixe pour $\phi \rightarrow -\infty$) est tracé en rouge. La symétrie entre les manifolds stables et instables observée dans l'espace de phase est due à la métrique de Schwarzschild et donc à l'équation (14) étant indépendante de la direction du temps.

Comme on peut le voir sur la figure 3 (à gauche) pour les manifolds stables et instables $\frac{du}{d\phi}$ n'est en général pas linéaire en u , mais lorsque nous sommes proches du point fixe ($\delta^2 < |\delta|$), voir

équation (5)), la relation devient approximativement linéaire. Il est important de noter qu'il existe deux ensembles de vecteurs propres autour de la sphère des photons. Le premier avec une valeur propre de -1 (le terme se rapprochant exponentiellement) et le collecteur instable avec une valeur propre de +1 (le terme divergeant exponentiellement). Ainsi, l'espace des phases suit clairement l'intuition de l'équation (6).

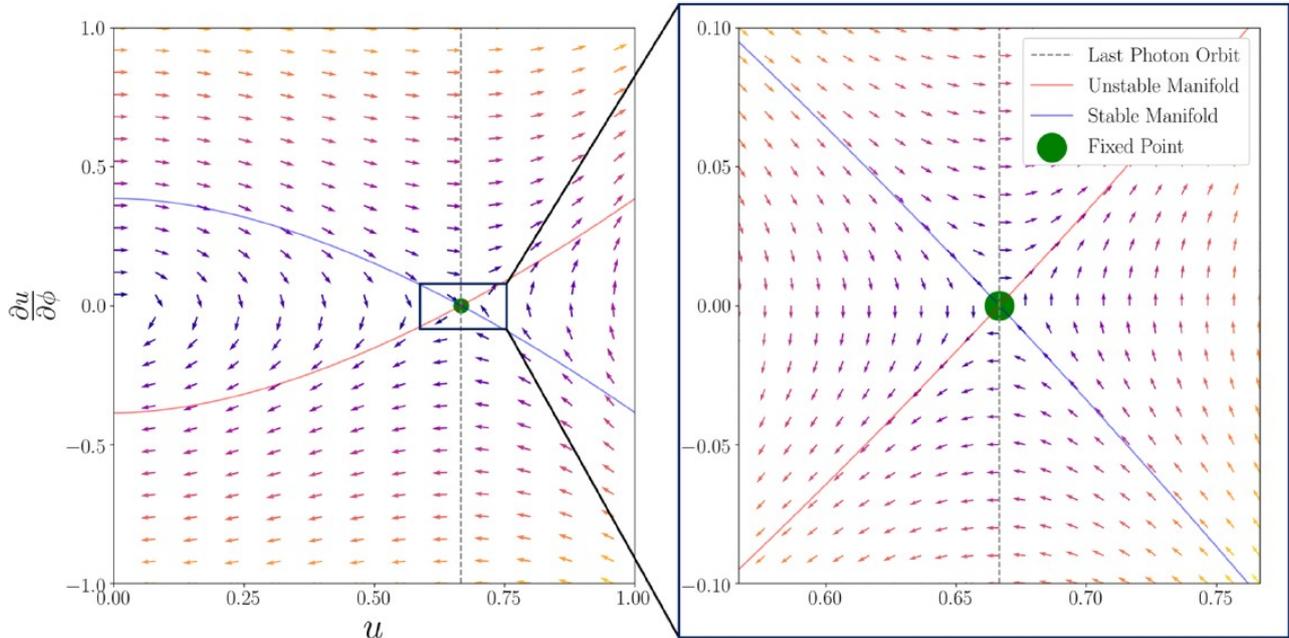


Figure 3 Portrait complet (à gauche) et agrandi (à droite) de l'espace des phases pour les trajectoires de la lumière obéissant à l'équation (3), la couleur des flèches indiquant l'ampleur du changement (les teintes plus vives impliquent des vecteurs plus longs). $u = 1$ est l'horizon des événements, $u = 0$ représente l'infini et $u = \frac{2}{3}$ est à la

sphère des photons. Si $u = \frac{2}{3}$ et $\frac{du}{d\phi} = 0$, les photons sont sur une orbite circulaire, ce qui représente donc un point fixe. Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'un point fixe stable car les déviations vont en général augmenter. On dessine les manifolds stable et instable qui, dans la version agrandie, sont approximativement linéaires. Le collecteur stable représente évidemment une matrice de séparation entre les conditions initiales des trajectoires qui traverseront l'horizon des événements ou seront éjectées à l'infini. Ainsi, le collecteur stable est équivalent au bord optique du trou noir.

Les différents signes des valeurs propres prouvent que le point fixe est un point nodal, intrinsèquement instable, car une perturbation provenant de la sphère des photons se traduit généralement par une divergence exponentielle. Évidemment, la valeur propre positive implique qu'une trajectoire divergera exponentiellement de l'orbite liée avec un facteur $e^{\gamma n} = e^{\gamma n}$ pour chaque demi-orbite n . Ici, l'exposant de Lyapunov, γ [suivant la définition de Johnson11] caractérise l'instabilité de l'orbite liée par rapport à une demi-orbite n . Ainsi, pour le cas de Schwarzschild pour la sphère de photons, $\gamma = \pi$.

Enfin, on remarque que les valeurs propres autour du point fixe en u sont aussi les valeurs propres pour r car $\frac{\partial u}{\partial \phi} = u \rightarrow \frac{\partial r}{\partial \phi} = -r$. Par conséquent, les valeurs propres ± 1 pour $(u, \frac{\partial u}{\partial \phi})$ correspondent aux valeurs propres ∓ 1 pour $(r, \frac{\partial r}{\partial \phi})$

Une queue de deux exponentielles.

Étant donné l'équation (6), nous trouvons les solutions linéarisées :

$$u = u_{eq} + \delta_1 e^\phi + \delta_{-1} e^{-\phi} \quad (7)$$

$$\frac{du}{d\phi} = \delta_1 e^\phi - \delta_{-1} e^{-\phi} \quad (8)$$

Lorsqu'on étudie la trajectoire de la lumière à proximité du trou noir, les deux termes exponentiels sont nécessaires pour franchir la distance d'équilibre (voir équation 7) ou pour que $\frac{du}{d\phi}$ change de signe (comme on le voit dans l'équation 8). L'importance des deux termes exponentiels est également illustrée sur la figure 4, où la lumière s'approche de la sphère de photons de manière exponentielle (chaque rotation la rapprochant d'un facteur $e^{2\pi}$) jusqu'à un angle de croisement de $\phi_c \approx 6\pi$. Après cela, le divergent e^ϕ domine et la lumière est éjectée vers l'infini. Si δ_1 avait le signe opposé, alors $\frac{du}{d\phi}$ resterait négatif, de sorte que l'angle de croisement se situerait sur la dernière orbite du photon, après quoi la lumière divergerait exponentiellement de la sphère de photons vers le trou noir. Curieusement, cela implique que l'angle balayé par le rayon autour du trou noir avant la sphère de photons est similaire à l'angle balayé par le rayon de la sphère de photons à l'horizon des événements.

Notamment, le rayon lumineux avec une trajectoire exactement sur le bord de l'ombre du trou noir (c'est-à-dire $\delta_0 = 0$) est la solution qui s'approche exponentiellement de la sphère de photons indéfiniment, car il ne diverge ni vers le trou noir ni vers l'univers de fond. Il s'ensuit que l'exponentielle convergente et par extension δ_{-1} doit être indépendante de δ_0 . Au lieu de cela, δ_{-1} est fixé par la distance approximative où l'expression linéarisée tient ($\delta_{-1} \approx 1$). Tout écart par rapport au paramètre d'impact critique, $\delta_0 \neq 0$, croîtra de manière exponentielle, ce qui implique que δ_1 (l'exponentielle divergente) est fixé par δ_0 . Ainsi, les estimations de l'ordre de grandeur suivent parfaitement les lignes ajustées de la figure 4.

Bien que la dérivation ne soit applicable que dans le régime linéarisé, les implications vont au-delà de l'environnement immédiat de la sphère de photons, car la déviation totale de la lumière peut être dominée par la rotation angulaire, alors que les photons sont dans le régime linéarisé. Lorsque l'on étudie l'angle de déviation totale ou l'angle de rotation de la lumière (comme indiqué dans la section "Orbites simulées"), nous résolvons les trajectoires de la lumière qui s'éloigne de u_{eq} , où l'exponentielle divergente doit dominer. Chaque orbite supplémentaire de la lumière sera cartographiée d'un facteur $f = e^{2\pi}$ plus près du bord de l'ombre du trou noir, car la diminution de δ_0 d'un facteur $e^{2\pi}$ retarde exactement le terme à croissance exponentielle une orbite. En outre, il convient de noter que la valeur analytique prédite, $f = e^{2\pi} \approx 535,49$, est remarquablement proche de la relation ajustée numériquement vue en "Orbites simulées".

En outre, pour la lumière déviée, il convient de noter que l'approche la plus proche de la sphère de photons ne diminuera que d'un facteur e^π pour chaque orbite supplémentaire, car l'angle de croisement est fixé par l'intersection des deux termes exponentiels. De même, pour la lumière traversant la sphère des photons, l'angle balayé de l'horizon des événements à la sphère des photons est similaire à l'angle balayé de la sphère des photons à l'observateur, car l'angle de croisement est toujours défini par l'intersection.

Généralisation de la métrique de Kerr

Il convient de souligner que la métrique de Schwarzschild est le cas limite d'un trou noir qui ne tourne pas. Sans cette condition, on obtient la métrique dite de Kerr (écrite ici en coordonnées Boyer-Lindquist avec $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ et $\Delta = r^2 - R_s r + a^2$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s r}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{2aR_s r}{\Sigma} \sin^2(\theta) dt d\phi - \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 \quad (9)$$

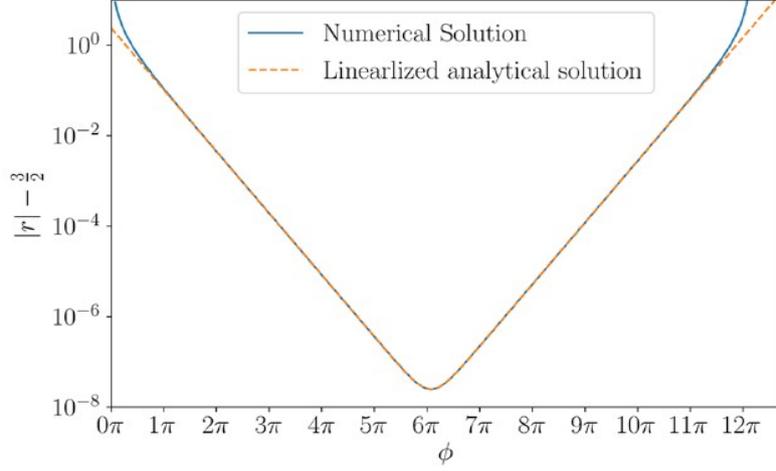


Figure 4 La distance radiale entre un rayon lumineux (avec $\delta_0 = 10^{-15}$) et la dernière orbite de photons en fonction de l'angle de déviation [en bleu]. La combinaison analytique prédite d'un terme à décroissance exponentielle ($e^{-\varphi}$) et d'un terme à croissance exponentielle (e^{φ}) est indiquée par une ligne pointillée jaune. De toute évidence, chaque terme domine à différents angles de φ , les lignes ajustées suggérant $\delta_1 \approx 10^{-16}$ et $\delta_2 \approx 1$. Pour $u - u_{eq} \approx 1$, la solution linéarisée ne tient plus.

ici $0 \leq a \leq 1$ est le facteur de moment angulaire, donc naturellement la métrique de Kerr se réduit à la métrique de Schwarzschild pour $a = 0$. Pour les orbites dans le plan équatorial (où une analyse en 2 dimensions est encore une description exhaustive) nous fixons $\theta = \frac{\pi}{2}$. Une réflexion plus poussée sur les orbites non équatoriales peut être trouvée grâce aux intégrales elliptiques¹². En introduisant les deux quantités conservées, le moment angulaire et l'énergie, la trajectoire des photons se réduit à¹³ :

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{(r^2 - R_s r + a^2)^2 \left[1 + \frac{R_s}{r^3}(b-a)^2 - \frac{1}{r^2}(b^2 - a^2)\right]}{\left[\frac{R_s a}{r} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)b\right]^2} \quad (10)$$

Avec b étant à nouveau le rapport constant entre le moment angulaire et l'énergie d'un photon. En différenciant les deux côtés avec $d/d\phi$, on obtient une équation différentielle du second ordre.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\phi^2} = & \frac{(2r - R_s)(r^2 - R_s r + a^2) \left(1 + \frac{R_s(b-a)^2}{r^3} - \frac{b^2 - a^2}{r^2}\right)}{\left[\frac{aR_s}{r} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)b\right]^2} + \frac{\frac{aR_s - bR_s}{r^2}(r^2 - R_s r + a^2)^2 \left(1 + \frac{R_s(b-a)^2}{r^3} - \frac{b^2 - a^2}{r^2}\right)}{\left[\frac{aR_s}{r} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)b\right]^3} \\ & + \frac{(r^2 - R_s r + a^2)^2 \left(1 + \frac{3R_s(b-a)^2}{r^4} - \frac{2(b^2 - a^2)}{r^3}\right)}{2 \left[\frac{aR_s}{r} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)b\right]^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Le portrait de phase de l'équation (11) pour $a = 0,5$ est illustré à la figure 5. Comme précédemment, le point fixe est défini par les racines de $\frac{dr^2}{d\phi^2}$, qui dépendront de a . Contrairement à la paramétrisation de Schwarzschild, l'équation (11) dépend de b , donc le paramètre d'impact critique des orbites prograde et rétrograde doit être évalué à n'importe quel a ¹³.

$$b_{\text{retrograde}} = -3R_s \cos\left(\frac{\arccos(a)}{3}\right) - a \quad (12)$$

$$b_{\text{prograde}} = 3R_s \cos\left(\frac{\arccos(a)}{3}\right) - a \quad (13)$$

Les orbites rétrogrades et progrades sont obtenues en évaluant le paramètre d'impact critique avec les équations (12) et (13). Pour tout spin donné, nous pouvons alors déterminer les points

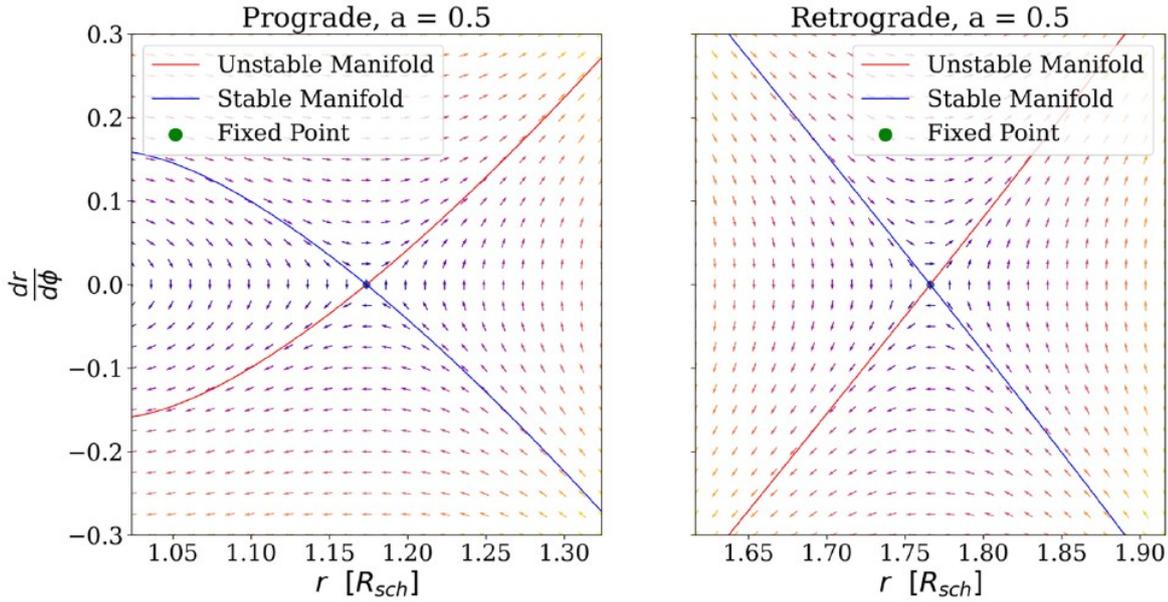


Figure 5 Portrait de l'espace de phase pour les trajectoires lumineuses obéissant à l'équation (11) avec $a = 0,5$ (à gauche : prograde et à droite : rétrograde), la couleur des flèches indiquant l'ampleur du changement (les teintes les plus claires impliquent des vecteurs plus longs). Les manifolds stables et instables sont dessinés et se comportent de manière approximativement linéaire avec une pente plus plate et plus raide que la Fig. 3 pour les orbites respectivement prograde et rétrograde. Notez que la substitution $u = \frac{1}{r}$ ne supprime pas le paramètre d'impact critique, contrairement au cas de Schwarzschild. Par conséquent, la figure reste en r et non en u comme la figure 3.

fixes, r_{eq} tels que $\frac{\partial r^2}{\partial \phi^2} = 0$. Une racine, $\Delta = 0$, représente l'horizon des événements, la racine réelle restante décrivant le cercle des photons (voir figure 6). La linéarisation générique donne :

$$\frac{dr^2}{d\phi^2} = s \cdot (r - r_{eq}) + O((r - r_{eq})^2)$$

Il est important de noter que nous obtenons une fois de plus une famille de deux exponentielles et que nous dérivons pour la première fois le déroulement de l'exponentielle pour la limite de champ fort de la lumière :

$$r = r_{eq} + \delta_1 e^{\sqrt{s}\phi} + \delta_{-1} e^{-\sqrt{s}\phi} \quad (14)$$

Pour n'importe quel spin, a , le coefficient exponentiel s est représenté sur la figure 6. De toute évidence, le point fixe est toujours un point d'équilibre et donc instable. Ici, le terme exponentiel divergent correspond à un exposant de Lyapunov de $\gamma = \pi s$ car les trajectoires vont diverger de la sphère de photons avec un facteur de $e^{\pi s}$ sur une demi-orbite. Fait notable, le coefficient exponentiel s entraîne une divergence encore plus rapide de l'angle logarithmique pour les orbites rétrogrades. Pour $\lim_{a \rightarrow 1} (s_{\text{rétrograde}}) = \frac{27}{16}$, donc une autre orbite nécessiterait d'être un facteur de $f = e^{2\pi\sqrt{27/16}} \simeq 3500$ plus proche du bord optique du trou noir. Inversement, pour les orbites progrades, la fonction exponentielle se déroule de plus en plus lentement pour des spins plus grands. Pour un trou noir tournant avec $a = 0,99$ (comme potentiellement observé¹⁵), où $s = 0,012$, seul un facteur $f = e^{2\pi\sqrt{0,012}} \simeq 2$ est nécessaire. Ici, chaque image répétée serait simplement plus proche d'un facteur 2 du bord optique du trou noir. Dans la limite d'un champ de Kerr extrême, $\lim_{a \rightarrow 1} (s_{\text{prograde}}) = 0$, les vecteurs propres s'effondrent et le point fixe devient un nœud dégénéré. Ainsi, un trou noir de Kerr en rotation extrême n'a pas de trajectoires exponentielles pour le mouvement prograde.

Ainsi, lorsqu'on observe le plan équatorial d'un trou noir en rotation, les réflexions progrades et rétrogrades présentent toutes deux la répétition exponentielle, mais les copies progrades d'une source se répéteront plus rapidement que les copies rétrogrades. Cette asymétrie a des applications potentiellement très importantes pour les observables, car toute signature observationnelle est limi-

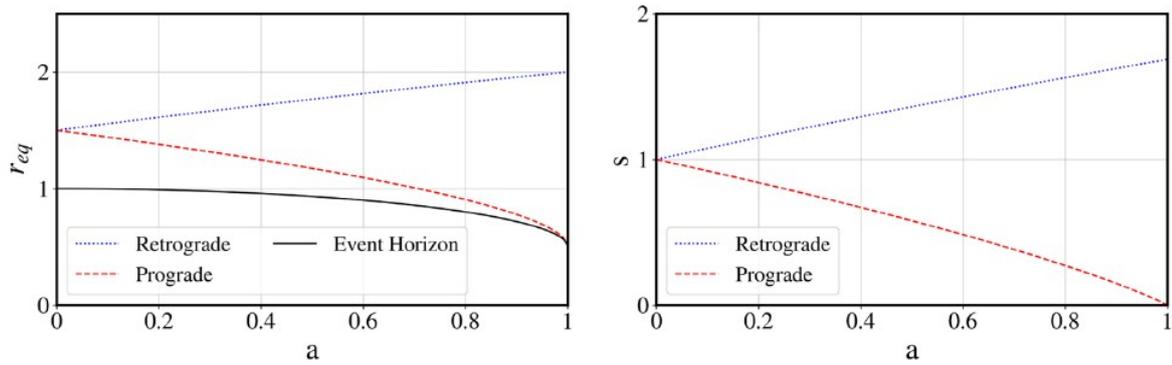


Figure 6 Rayon du cercle des photons, r_{eq} (gauche), et coefficient linéaire de l'expansion de Taylor, s (droite). Orbites rétrogrades (en bleu pointillé) et orbites progrades (en rouge pointillé). La localisation du cercle des photons est en accord14, tandis que le résultat générique $s > 0$ pour $0 \leq a < 1$, implique que le point fixe sera toujours un point selle avec des valeurs propres $\pm s$ et donc instable. Notamment à $a = 1$, les deux points fixes réels du mouvement prograde bifurquent.

tée par la luminosité des images subséquentes diminuant nettement¹¹. Par conséquent, la répétition spatiale rapide des images progrades fournira les premières signatures observationnelles de la répétition exponentielle dans les limites des capacités de détection.

Enfin, la généralité mathématique de deux valeurs propres réelles, existant pour tous les spin a , ne doit pas être négligée. Quel que soit le spin du trou noir, il existera toujours une famille d'exponentielles convergentes et divergentes. Ces exponentielles prescrivent l'ensemble des trajectoires de la lumière à proximité des orbites des photons. Leur prescription implique que tout objet source dans le plan soit répété en une série de copies exponentiellement plus fines, l'échelle des répétitions étant fixée par le spin du trou noir.

Conclusion

Ce travail introduit une famille de deux solutions exponentielles distinctes qui, ensemble, fournissent une description succincte de l'ensemble des trajectoires orbitales de la lumière près d'un trou noir de Schwarzschild. Nous apportons ainsi un éclairage analytique sur les solutions précédemment développées^{2,4-8}. Notre formalisme fournit quelques interprétations importantes. Tout d'abord, il indique que l'angle de déviation de la lumière de fond diverge logarithmiquement lorsque la trajectoire s'approche de la dernière orbite de photons. De manière équivalente, du point de vue d'un observateur distant regardant le bord optique du trou noir (le rayon de capture des photons), l'arrière-plan entier sera représenté par des anneaux de plus en plus fins. Deuxièmement, l'horizon des événements du trou noir lui-même sera représenté de manière répétée par des anneaux exponentiellement plus fins, juste à l'intérieur du rayon de capture des photons. Par conséquent, tout objet accostant le trou noir peut être observé de manière répétée de plus en plus près du bord optique. Troisièmement, ce bord du trou noir est l'emplacement du collecteur stable et instable.

La preuve présentée ici est immédiatement généralisable à tout espace-temps à symétrie sphérique (tel qu'un trou noir de Reissner-Nordstrøm). De telles métriques peuvent être écrites de manière similaire comme une équation différentielle du second ordre dans \mathbf{r} avec des solutions stables et perturbées. D'autres travaux pourront étudier ces exponentielles, qui seront en général caractérisées par une constante, $s \neq 1$, à multiplier sur φ dans les exposants de l'équation (14). Il est important de noter que, comme nous l'avons vu dans la section "Généralisation de la métrique de Kerr", notre méthodologie peut même être appliquée à des trous noirs non sphériquement symétriques, tels que les trous noirs tournants de la métrique de Kerr. Avec l'augmentation du spin, le coefficient exponentiel, s , des trajectoires progrades diminue alors que les rétrogrades augmentent. Cela prouve donc que le côté du trou noir qui tourne vers l'observateur reflète de manière répétée l'univers dans de larges bandes. Dans la limite d'un trou de Kerr extrêmement rotatif, le $s_{\text{retrograde}} = \frac{27}{16}$ et le

$s_{\text{prograde}} = 0$. Ainsi, il n'y a pas de divergence logarithmique pour les réflexions progrades lorsque $a = 1$, mais pour tout spin $a < 1$, il existe une famille exponentielle prescrivant les trajectoires.

D'un point de vue philosophique, il existe une beauté mathématique dans les exponentielles doubles des équations (7) et (14). Les exponentielles prédisent qu'un observateur à l'infini verra l'ensemble de l'horizon des événements du trou noir et tout ce qui s'accumule sur le trou noir cartographié à l'infini lorsqu'il se rapproche du rayon de capture des photons du trou noir. Juste au-delà du rayon de capture des photons, les exponentielles prévoient que l'observateur verra également l'univers entier reflété en tranches exponentiellement plus petites jusqu'à la limite quantique. Une divergence qui mérite certainement une réflexion plus approfondie.

Reçu : 12 mai 2021 ; Accepté : 21 juin 2021

Publié en ligne : 09 juillet 2021

Références

1. Schwarzschild, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907 1916*, 189–196 (1916).
2. Luminet, J. P. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astron. Astrophys.* 75, 228–235 (1979).
3. Stuckey, W. M. The Schwarzschild black hole as a gravitational mirror. *Am. J. Phys.* 61, 448–456. <https://doi.org/10.1119/1.17434> (1993).
4. Perlick, V. Gravitational lensing from a spacetime perspective. Preprint at <https://arxiv.org/pdf/1010.3416.pdf> (2010)
5. Darwin, C. The gravity field of a particle. *Proc. Royal Soc. Lond. Ser. A* 249, 180–194. <https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0015> (1959) (gr-qc/0208075).
6. Bozza, V. Gravitational lensing in the strong field limit. *Phys. Rev. D* 66, 103001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.103001> (2002).
7. Muñoz, G. Orbits of massless particles in the Schwarzschild metric: Exact solutions. *Am. J. Phys.* 82, 564–573. <https://doi.org/10.1119/1.4866274> (2014).
8. Gralla, S. E., Holz, D. E. & Wald, R. M. Black hole shadows, photon rings, and lensing rings. *Phys. Rev.* 100, 024018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024018> (2019) (1906.00873).
9. Musiri, S. Two conserved angular momenta in Schwarzschild spacetime geodesics. *J. Phys. Conf. Series* 1380, 012168. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1380/1/012168> (2019).
10. Schutz, B. *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
11. Johnson, M. D. et al. Universal interferometric signatures of a black hole's photon ring. *Sci. Adv.* 6, eaaz1310. <https://doi.org/10.1126/sciadv.aaz1310> (2020) (1907.04329).
12. Gralla, S. E. & Lupsasca, A. Lensing by Kerr black holes. *Phys. Rev. D* 101, 044031. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.044031>(2020) (1910.12873).
13. Cramer, C. R. Using the uncharged Kerr black hole as a gravitational mirror. *Gen. Relativ. Gravit.* 29, 445–454. <https://doi.org/10.1023/A:1018878515046> (1997) (gr-qc/9510053).
14. Bardeen, J. M., Press, W. H. & Teukolsky, S. A. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *Astrophys. J.* 178, 347–370. <https://doi.org/10.1086/151796> (1972).
15. McClintock, J. E. et al. The spin of the near-extreme Kerr black hole GRS 1915 + 105. *Astrophys. J.* 652, 518–539. <https://doi.org/10.1086/508457> (2006) (astro-ph/0606076).

Remerciements

L'auteur tient à remercier Mogens Høgh Jensen, Martin Pessah, Charles Steinhardt et Nikki Arendse pour leurs délibérations utiles et leurs commentaires perspicaces. Le Centre Cosmic Dawn (DAWN) est financé par la Fondation nationale danoise pour la recherche sous la subvention n° 140.

Contributions des auteurs

A.S. a rédigé et révisé l'ensemble du manuscrit.

Intérêts concurrents

Les auteurs ne déclarent aucun intérêt concurrent.

Informations complémentaires

La correspondance et les demandes de matériel doivent être adressées à A.S.

Les informations relatives aux réimpressions et aux autorisations sont disponibles à l'adresse www.nature.com/reprints.

Note de l'éditeur Springer Nature reste neutre en ce qui concerne les revendications juridictionnelles dans les cartes publiées et les affiliations institutionnelles.



Accès libre

Cet article est soumis à une licence internationale Creative Commons Attribution 4.0, qui autorise l'utilisation, le partage, l'adaptation, la distribution et la reproduction sur n'importe quel support ou dans n'importe quel format, à condition de citer de manière appropriée le ou les auteurs originaux et la source, de fournir un lien vers la licence Creative Commons et d'indiquer si des modifications ont été apportées. Les images ou tout autre matériel tiers figurant dans cet article sont inclus dans la licence Creative Commons de l'article, sauf indication contraire dans une ligne de crédit vers le matériel. Si le matériel n'est pas inclus dans la licence Creative Commons de l'article et que l'utilisation que vous souhaitez en faire n'est pas autorisée par la réglementation en vigueur ou dépasse l'utilisation autorisée, vous devrez obtenir l'autorisation directement auprès du détenteur des droits d'auteur. Pour consulter une copie de cette licence, visitez <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

© Les auteur(s) 2021

Scientific Reports | (2021) 11:14247 | <https://doi.org/10.1038/s41598-021-93595-w>

Institut Niels Bohr, Université de Copenhague, Blegdamsvej 17, Ø 2200 Copenhague, Danemark. 2Centre de l'aube cosmique (DAWN), Copenhague, Danemark. e-mail : a.sneppen@gmail.com