Les mathématiques et la théorie de la connaissance

G. Milhaud, la Revue Scientifique — 12 février 1887

Le souci trop exclusif de la rigueur donne à l'enseignement des mathématiques une forme souvent dogmatique. Ceux qui ont reçu cet enseignement dans les lycées ou les facultés sont longtemps sans comprendre qu'il puisse y avoir, à propos de ces sciences, des questions capables de diviser les penseurs, et toute discussion philosophique sur les notions essentielles des mathématiques est souvent mal accueillie. par la simple raison qu'on en sent difficilement la nécessité.

Nous voulons ici faire comprendre à grands traits comment les mathématiques peuvent donner lieu à des discussions intéressantes sur l'origine et la formation de leurs concepts. Nous ferons voir pour cela que l'enchaînement rigoureux des déductions auxquelles tend l'enseignement est en réalité postérieur au développement normal de ces sciences et qu'il n'atteint son idéal de rigueur que pour devenir de plus en plus formel, et par cela même, de plus en plus subjectif.

Quand on ouvre un traité de mathématiques, on est frappé de l'importance du rôle que jouent les définitions : chacune d'elles sert de base à un développement plus ou moins long, formant tout un chapitre nouveau. Ce sont, pour ainsi dire, les éléments vitaux des mathématiques : la puissance de déduction de l'esprit semblait épuisée sur les premiers objets de ses études, une définition survient et apporte un nouvel aliment il son activité. C'est ainsi que les définitions semblent chaque fois assurer une prolongation de vie aux mathématiques, de manière à en reculer les bornes à l'infini. - Or que renferme une définition ? A quelle condition est-elle acceptable ?

Une définition a pour objet de construire une chose ou un fait à l'aide de certaines propriétés reliant l'élément nouveau à ceux déjà connus, et la seule condition imposée à ces propriétés parait être qu'elles ne présentent entre elles aucune contradiction logique. C'est le seul point sur lequel on juge utile d'insister quand, en mathématiques, on sent le besoin de justifier une définition. Mais alors la première impression que donne la lecture d'un traité spécial est des plus étranges. Il semble que l'esprit puisse se donner libre carrière : n'a-t-il pas, pour créer ses définitions, un champ sans limite ? - et non seulement on sent bien que la science mathématique ne saurait avoir de bornes, mais encore on se demande s'il ne pourrait exister une infinité de mathématiques distinctes de celles qui sont enseignées, si enfin celles-ci ne sont pas dues il un caprice de l'intelligence humaine qui se serait plu à suivre une voie parmi tant d'autres également accessibles ? - En géométrie, passe encore ! on se sent vaguement guidé par des corps, par des formes, semblables à ce que nous montre le monde extérieur. Mais que dire de l'analyse, maintenant surtout que, grâce aux travaux de reconstruction des Lagrange, Cauchy, Abel, etc., il est possible de parvenir aux notions les plus élevées sans faire intervenir d'autre donnée expérimentale que le nombre[1]?

Pour se rassurer et voir disparaître le caractère capricieux et arbitraire des mathématiques, il faut remonter à la genèse des notions qu'elles étudient et regarder un peu par-dessous cet arrangement parfait qu'on nous présente aujourd'hui.

On distingue ordinairement les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, les premières étant la géométrie et l'analyse, les autres étant des applications de celles-là. C'est mal indiquer qu'une seule question de degré justifie celte distinction : la géométrie et l'analyse sont les premières et les plus simples applications de la mathématique, c'est-à-dire de ces suites spéciales de déductions, de ces méthodes logiques particulières qui appartiennent à toutes les sciences mathématiques, abstraction faite de leurs objets. On sait d'abord que les données premières de la géométrie et de l'analyse sont puisées dans le monde extérieur. La géométrie lui emprunte l'étendue, le point, la ligne droite avec toutes leurs propriétés intuitives. L'analyse est fondée sur le nombre, dont l'idée nous est fournie par l'expérience, et sur ses propriétés ; ce sont là des vérités naïves sur lesquelles il est inutile d'insister. Mais les points de départ ainsi fixés, l'indétermination du chemin à suivre n'en subsisterait pas moins si la géométrie ou l'analyse ne se laissaient guider par des données extérieures, et c'est précisément, en dépit des apparences, ce qu'elles font sans cesse. Nous ne voulons pas parler ici seulement du postulat d'Euclide qui, loin d'être un axiome logique, est nettement déjà l'affirmation d'un fait expérimental. On peut le joindre aux données initiales : elles sont si complexes qu'il importe fort peu de penser ou non que ce fait nouveau est impliqué dans les notions intuitives sur lesquelles est fondée la géométrie. D'ailleurs, il n'y a eu d'arrangement d'aucune espèce dissimulant le fait tout nu, et il y aurait peu d'intérêt à dénoncer cet emprunt à l'expérience.

Mais il y a plus : tous les éléments nouveaux qu'étudie la géométrie, angle, angle droit, cercle, longueur de circonférence, etc., ne sont suggérés que par le monde extérieur. Il en est de même en analyse du nombre fractionnaire, du nombre incommensurable, de la limite, etc. Les nombres imaginaires eux-mêmes sont apportés par l'expérience, quoique cela paraisse paradoxal. C'est qu'ici cette expérience s'est affinée, pour ainsi dire, et est devenue la constatation du résultat d'un calcul ou d'une transformation algébrique. Mais tout cela est loin d'être évident. Chaque fois qu'un nouvel objet d'étude est suggéré, les mathématiques se l'assimilent au point d'en dissimuler l'origine, ou plutôt, à

1 *Voir l'Introduction à l'étude des fonctions d'une variable, de M. J. Tannery.*

l'occasion de cet élément, elles construisent logiquement Ui être nouveau, elles le créent de toutes pièces, et si l'unique souci qui les guide paratt être la non-contradiction des propriétés dont elles l'affublent et la possibilité de les exprimer à l'aide des éléments anciens, en réalité, la préoccupation première a été que cette création logique correspondit exactement à l'objet concret. Cette préoccupation est peu visible, parce qu'elle importe peu à la rigueur des raisonnements. Mais si on ne veut pas laisser aux mathématiques une beauté purement platonique, s'il faut qu'elles méritent leur titre de science, tous ces développements logiques sont destinés à être utilisés dans la connaissance générale du monde physique, et alors, pour la solution du problème le plus simple, on sera bien obligé d'admettre l'identité de l'objet extérieur et du concept purement logique. A cet instant précis se trouve dénoncée l'origine expérimentale de toute définition. Si on a pu la dissimuler, c'est à la seule condition d'y substituer, pour l'instant de l'application, une proposition indémontrable, un véritable postulat, par lequel nous affirmons que nos théories logiques peu vent donner l'explication d'un fait objectif.

Quelques exemples simples aideront à éclaircir ces idées.

Après l'étude de quelques propriétés des lignes droites considérées ensemble, la géométrie utilise ces propriétés à l'occasion d'un élément nouveau : le cercle. La définition qui lui sert, pour ainsi dire, de passeport est la suivante : La circonférence de cercle est le lieu géométrique d'un point situé à une distance donnée d'un point déterminé. Traduisez : Que par le point déterminé on mène une droite quelconque, qu'on prenne sur cette droite, à partir du point, une longueur égale à la distance donnée : l'extrémité de cette longueur est ce qu'on appelle un point de cercle. La possibilité de construire ainsi autant de points de cercle qu'on voudra, voilà ce que contient la notion de lieu géométrique qui entre dans cette définition. On déduit de celle-ci toutes sortes de propriétés ; par exemple, une droite, qui a un point commun avec un cercle, en a un second ; un diamètre partage le cercle en deux parties symétriques ; en d'autres termes, à tout point de cercle, on peut en faire correspondre un second symétrique par rapport à un diamètre quelconque, etc. La considération des polygones inscrits, c'est-à-dire dont les sommets sont points de cercle, permet de définir la longueur de la circonférence : ce sera la limite des périmètres des polygones inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment ... Dans tout ce développement, il n'entre en aucune façon l'idée de la forme du cercle, de ce rond parfait que nous tirons par abstraction de ceux que fournit l'expérience. Ce rond est formé par un contour continu ; il divise le plan en deux parties : l'une, qu'il limite et que nous disons intérieure, et une autre, extérieure... toutes notions absolument distinctes des définitions et déductions géométriques. De même, le concept purement logique de la longueur de la circonférence est essentiellement distinct de ce que, par intuition, nous entendons par la longueur d'un rond, le tour d'une roue, par exemple, ou la longueur d'un fil d'abord exactement appliqué sur la circonférence rie la roue, puis déroulé.

C'est ainsi que, là même où les mathématiques semblent être le plus voisines des objets concrets de l'intuition expérimentale, elles se développent parallèlement à ces objets et sans jamais faire disparaître la dualité qu'offre la donnée des sens, affinée même par l'abstraction et la construction logique de l'esprit. Mais ici, du moins, ce parallélisme est assez parfait pour que nous sentions fort bien comment a procédé la géométrie. L'expérience a d'abord fourni, non seulement la notion du cercle, mais une foule de ses propriétés. Parmi celles-ci, à une époque de beaucoup postérieure, le géomètre a choisi celles qui, tout en ne s'exprimant qu'à l'aide de droites, de points et de longueurs, pouvaient le mieux, à ses yeux, caractériser le cercle concret et il a construit avec elle la théorie du cercle. Mais qu'on demande seulement, par exemple, quel est le tour d'une roue dont on donne le rayon, comment résoudre le problème à l'aide de la géométrie, si on n'admet l'identité entre la limite des périmètres des polygones inscrits et le tour même de la roue ? — L'arrangement par lequel on a chassé l'expérience est trahi à cet instant par un postulat, celui précisément qui, en réalité, avait conduit à la définition logique.

L'exemple précédent nous reportait à une époque reculée de l'histoire des mathématiques ; en voici un, au contraire, qui, bien qu'emprunté à l'arithmétique élémentaire, répond à des tendances actuelles. Au commencement du chapitre des fractions, en arithmétique, on accepte ordinairement un fait d'expérience : le partage de l'unité en parties égales. — L'égalité de deux fractions ou la supériorité d'une fraction sur une autre s'expliquent par la considération de deux longueurs, par exemple, mesurées par les fractions. La donnée expérimentale, qui rompt en arithmétique la chaîne des déductions, n'a donc pas disparu. Mais cependant rien n'est plus aisé que de dissimuler ici l'origine du développement nouveau[2]. Appelons fraction le symbole formel composé de deux nombres entiers écrits l'un au-dessus de l'autre ($\frac{a}{b}$). Convenons de dire que deux fractions sont égales quand les termes de l'une sont des équimultiples de ceux de l'autre ; définissons somme, différence, produit, quotient de fractions, les résultats auxquels conduirait la considération des quantités concrètes, etc. Les définitions étant toujours conformes à ce qui résultait pour nous de la donnée expérimentale, rien ne sera changé à la suite du chapitre sur les fractions. Il est probable que tôt ou tard on exposera ainsi couramment ce chapitre, Mais qu'on trouve alors la solution $x=\frac{2}{3}$ au problème le plus simple, où l'inconnue est une longueur, il faudra bien admettre, pour l'interpréter, que $\frac{2}{3}$ représente deux fois le tiers de l'unité, et, en somme, on rétablira ainsi tout ce qu'on aura paru supprimer.

Ces exemples suffiraient peut-être à montrer la marche des sciences mathématiques : elles se développent naturellement sous l'impulsion de l'expérience, mais cachent tôt ou tard sous des constructions logiques l'origine de leurs concepts. En voici une dernière lit intéressante confirmation tirée de l'analyse supérieure.

Supposons qu'à un instant quelconque de l'histoire des mathématiques, on sente le besoin d'utiliser une propriété nouvelle des quantités concrètes, il ne sera pas toujours facile de l'énoncer simplement, de l'ex-

2 *Voir le commencement de l'ouvrage déjà cité de M. Tannery.*

pliquer, de la ramener à d'autres connues, de débrouiller les éléments complexes qu'elle implique. Il se peut cependant que des esprits élevés devinent comme par instinct qu'il s'agit là d'une notion féconde, et qu'un développement fondé sur elle réalisera un grand progrès dans la connaissance générale des choses. A priori, nous n'avons pas de peine à admettre l'existence de tout un long chapitre mathématique construit sur des notions qu'on n'explique pas : la géométrie et l'arithmétique n'ont-elles pas pour données initiales des concepts impossibles à définir ? Si nous supposons enfin que les chercheurs appliqués aux idées nouvelles, frappés de l'intérêt des résultats, se soient avant tout préoccupés d'en enrichir la liste, la reconstruction logique des données expérimentales risquera fort de rester longtemps inachevée ; longtemps la branche analytique qui aura ainsi poussé brusquement semblera ne point se rattacher au tronc primitif. C'est précisément là ce qui s'est passé pour l'analyse supérieure, pour cette partie de l'analyse qui traite des incommensurables, des limites, des séries et produits infinis, des infiniment petits, des différentielles, etc. Le fait expérimental qui en est le point de départ, et dont l'introduction dans l'analyse remonte à une époque impossible à fixer, est la notion du devenir de la quantité concrète, du passage continu d'un état à un autre. Après avoir suggéré bien des travaux, cette notion parvint à sa dernière et complète consécration dans les méthodes qu'inaugurèrent Newton et Leibniz. Mais l'exposé de ces méthodes est loin d'avoir toujours présenté l'enchaînement dont les traités nous donnent aujourd'hui le tranquille spectacle. Ce n'est que difficilement et au prix de longs efforts qu'a été définitivement arrêté, au moins en France, depuis Cauchy et Duhamel, l'exposé de l'analyse infinitésimale. Le problème de reconstruction logique qui devait en faire une suite rigoureuse des chapitres antérieurs est-il complètement résolu ? Nous allons faire voir qu'il ne l'est pas d'une façon absolue dans l'enseignement actuel, sauf à montrer ensuite comment un pur formalisme peut fournir cette solution.

L'exposé que présentent aujourd'hui les cours d'analyse, et qui a pour point de départ la définition mathématique de la limite, réduit le fait expérimental que nous avons signalé à un simple postulat, indémontrable, que M. Paul du Bois-Reymond compare avec raison au fameux axiome d'Euclide. Il s'agit du principe des limites, qui s'énonce ainsi : Si une quantité variable croit sans cesse, tout en restant inférieure à une quantité déterminée, elle a une limite.

Duhamel en donne la démonstration suivante[3]:

« Soit A la valeur au-dessous de laquelle est toujours la variable, et B une de celles qu'elle prendra ; qu'on partage l'intervalle de B à A en parties égales aussi petites que l'on voudra : la variable pourra bien dépasser tous les points de division, mais ne peut aller jusqu'à l'extrémité ; il pourra aussi se faire qu'elle ne les dépasse pas tous, et alors il y en aura un qui sera le dernier qu'elle dépasse ; elle restera donc toujours comprise entre celui-ci et le suivant, c'est-à-dire dans un intervalle aussi resserré qu'on aura voulu, et dans lequel elle ira toujours en croissant. En subdivisant cet intervalle en un nombre aussi grand qu'on voudra de parties égales, on reconnaîtra de même que la grandeur ne peut se

3 *Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement, 2° partie, p. 413.*

trouver que dans un nouvel intervalle fixe entre B et A, et d'une étendue aussi voisine de zéro qu'on le voudra. Il existe donc une certaine valeur fixe entre B et A, dont la variable s'approche indéfiniment ; elle a donc une limite. »

Le raisonnement est rigoureux jusqu'à la conclusion — exclusivement. Quant à passer de ce que l'intervalle qui comprend la grandeur peut devenir aussi petit qu'on veut à l'existence de la limite, ce n'est pas moins difficile que d'admettre d'emblée la conclusion, sans démonstration aucune. Ainsi que le montre nettement M. Paul du Bois-Reymond, la diminution de l'intervalle qui comprend la grandeur n'atténue pas la difficulté qu'il y a à concevoir la limite. Le raisonnement de Duhamel cache une illusion, et cela est si vrai que souvent, au contraire, pour expliquer qu'une grandeur resserrée dans un intervalle de plus en plus petit a une limite, on se fonde sur ce que les valeurs qui la comprennent forment deux séries, l'une croissante, l'autre décroissante, — admettant chacune une limite, d'après le principe en question ; il suffit ensuite de remarquer que les limites sont les mêmes.

M. Bertrand, à propos de séries à termes positifs. dit simplement : « Il est clair que si, dans la somme $u_0 + u_1 + ... + U_n$, on prend un nombre de termes toujours croissant, les résultats obtenus iront en augmentant, et s'ils ne peuvent pas dépasser toute limite, ils approchent nécessairement autant qu'on veut du plus petit des nombres qu'ils ne peuvent pas surpasser. » C'est de la même manière que raisonne M. Briot. Mais qui ne sent que l'existence de ce minimum parmi les valeurs que ne peut dépasser la variable n'est rien moins que démontrée, et qu'en somme ce raisonnement se réduit à changer, sans l'expliquer, l'énonciation du fait intuitif ?

Ces démonstrations et toutes celles qu'on peut rencontrer reviennent, au fond, aux deux que développe l'auteur de ce livre, montrant chaque fois l'illusion qu'elles dissimulent. Faudra-t-il suivre l'Idéaliste de notre auteur dans l'usage qu'il fait de ses mystérieux infiniment petits pour l'objet qui nous occupe, ou bien se contenter de la manière de raisonner de l'Empiriste, à qui des approximations suffisent ? D'autre part, si on rejette toutes ces démonstrations, acceptera-t-on le principe des limites au même titre qu'une proposition de ce genre : « La même chose ne peut pas être et ne pas être en même temps ? » Il est très clair, au contraire, que le principe des limites énonce un fait nouveau, une propriété particulière de la quantité concrète et continue. Le caractère d'évidence qu'il nous présente est dû à l'expérience seule. C'est bien un véritable postulat que l'enseignement pose au début de l'analyse supérieure, réduisant ainsi à la vérité qu'il énonce, comme à un minimum nécessaire, la donnée qui lui sert de base.

Est-il possible de dissimuler aussi ce postulat ? Il suffit, pour s'en convaincre, de lire l'*Introduction à l'étude des fonctions d'une variable*, de M. J. Tannery. L'enchaînement rigoureux de définitions et de déductions par lesquelles l'auteur nous conduit insensiblement du nombre entier à toutes les notions les plus élevées résout bien décidément le problème de reconstruction logique qui devait faire disparaître toute lacune entre les anciennes et les nouvelles mathématiques. Pour comprendre par quel mécanisme simple il est possible d'atteindre ce résultat, qu'on se rappelle l'exemple des fractions déjà mentionnée. A la condition de se résoudre à un pur formalisme, rien n'est plus aisé que d'appliquer ici une méthode identique. Nous sommes convaincus qu'une suite de valeurs croissantes, mais ne croissant pas indéfiniment, a une limite quand, sous ces valeurs, nous avons en vue des états successifs d'une quantité concrète : laissons de côté cette dernière considération et créons, en vertu d'une définition, la limite de la suite de valeurs. Ce ne sera plus une chose concrète vue par intuition sensible, ce sera un pur symbole. Nous conviendrons de dire qu'il est supérieur à toute valeur atteinte ou dépassée par la suite qui sert à le définir, inférieur à toute valeur qu'il n'atteint jamais ; nous conviendrons des circonstances où deux symboles répondant à la définition nouvelle sont égaux, ainsi que des résultats d'opérations effectuées sur eux, et grâce au souci constant de faire correspondre ces définitions ou conventions aux vérités qui résultent pour nous de l'existence de la limite, rien ne sera changé dans la suite des déductions. Le principe des limites aura disparu de l'analyse, en tant que proposition à établir, et avec lui la dernière trace de toute donnée expérimentale autre que la don née initiale de l'arithmétique, le nombre. Mais pour appliquer à ce dernier exemple les idées indiquées à grandes lignes dans cette préface, il est bien entendu que dès qu'on touchera à l'outil ainsi affiné pour résoudre le plus enfantin des problèmes ayant trait à des longueurs, par exemple, la solution ne sera justifiée et interprétée que grâce à l'opinion que les symboles correspondent à des réalités.

La tendance à éliminer toute donnée expérimentale antre que les données initiales est-elle une simple manie des mathématiciens ? Manie dangereuse, en ce cas, puisqu'elle a pour conséquence de donner à leur science une allure capricieuse et l'apparence d'un simple jeu d'esprit. Cette tendance répond, au contraire, à une haute nécessité philosophique. Les éléments de notre connaissance, quelle qu'en soit l'origine expérimentale ou rationnelle, se combinent dans notre esprit de telle sorte que le degré et la nature de la certitude qu'ils comportent sont souvent fort difficiles à préciser. Or la reconstruction logique des faits mathématiques a pour résultat de séparer nettement ce qui, en eux, présente le caractère de la certitude sinon absolue, du moins la plus haute à laquelle nous puissions atteindre, et ce qui n'est qu'une vérité d'induction. En d'autres termes, elle a pour effet de créer une mathématique idéale, planant au-dessus de toute expérience ; c'est celle que connaissent surtout les mathématiciens : derrière leurs échafaudages logiques, ils sont bien réellement à l'abri de toute objection, et c'est avec raison que l'évidence de leurs conclusions est prise pour le type de la plus complète qu'il y ait à nos yeux. Stuart Mill prétend que la certitude des vérités mathématiques est inductive ; cette thèse n'atteint que les vérités mathématiques objectivées, pour ainsi dire, énoncées à l'occasion des êtres concrets que suggère l'expérience. Elle nous parait, en ce cas, absolument juste, car elle revient à dénoncer l'éternel postulat qui se cache, pour reparaître au moment de l'application, derrière toute création du géomètre ou de l'analyste. Mais elle ne saurait porter sur les vérités logiques de cette mathématique idéale que nous venons de définir. Celle-ci semble, il est vrai, n'être point débarrassée des données initiales. Si on y regarde de près, on voit cependant qu'elle n'affirme rien sur ces données elles-mêmes et montre seulement quelles en sont les conséquences, si on les accepte comme hypothèses.

Enfin, la confection de cette mathématique, toute formelle et subjective, nous donne néanmoins sur les choses elles-mêmes une indication précieuse : elle nous apprend quel est le minimum de propriétés qu'il suffit de supposer dans ces choses pour justifier l'application de ces vérités logiques. Toutes les propriétés géométriques du cercle, par exemple, s'étendront aux ronds concrets, s'il en existe, dont tous les points sont à la même distance d'un centre.

L'analyse supérieure s'appliquera aux quantités dont il existe des états correspondant à tous les symboles qu'elle a créés, etc.

Et ainsi on apprend à connaître le minimum des propriétés caractéristiques par lesquelles un fait concret peut entrer dans l'engrenage des déductions de la mathématique pure.

Voilà d'où celle-ci tire sa raison d'être. Il suffit seulement, pour n'en pas compromettre les avantages, de se rendre un compte exact de son caractère formel. On ne s'étonnera plus alors que la connaissance mathématique puisse être l'objet de longues et intéressantes discussions.

G. Milhaud